Міністерство освіти і науки України
Інститут модернізації змісту освіти

ФІНАЛЬНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ БІЙ XX ВСЕУКРАЇНСЬКОГО ТУРНІРУ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

1. Розглядається добуток деяких 20 послідовних натуральних чисел, до них додається добуток деяких інших 20 послідовних натуральних чисел, потім – ще деяких 20 послідовних натуральних чисел тощо. Всього додано 20 таких добутків. Довести, що в десятковому записі отриманої суми не менше 6 цифр, відмінних від цифри 2.

2. Для додатних чисел $x,\ y,\ z$ доведіть нерівність
$$x^{\lg x}\, y^{\lg y}\, z^{\lg z}\Big(x^{\lg y}+y^{\lg z}+z^{\lg x}\Big)^6 \geq 729.$$

3. Дано відрізок AB, точка M – його середина. Знайти геометрічне місце точок X таких, що
$$\angle MXB = \angle XAB + \angle XBA.$$

4. а) У рядок виписано 2017 чисел: перше – одиниця, далі чергуються двійки та одиниці:
$$1\ 2\ 1\ 2\ 1\ \ldots\ 1\ 2\ 1.$$
Петрик і Марічка грають у таку гру: Петрик ставить до деяких з цих чисел знак "мінус" (можливо, не ставить зовсім), а потім Марічка змінює знак у деяких 1009 послідовних чисел підряд. Після цього Петрик платить Марічці модуль суми отриманих чисел. Знайти найбільшу суму виграшу, яку може гарантувати собі Марічка при довільній грі суперника.

   б) При тих самих діях гравців Марічка платить Петрику модуль суми отриманих чисел. Знайти найбільшу суму виграшу, яку може гарантувати собі Петрик при довільній грі суперниці.

5. Натуральне число називається напівпростим, якщо воно є добутком двох простих чисел (не обов'язково різних). Яку найбільшу кількість напівпростих чисел можна виділити серед 10 послідовних натуральних чисел?

6. Для натуральних чисел $n \geq m$ доведіть рівність
$$\sum_{k=m}^{n} A_k^m C_n^k C_n^{n-k} = A_n^m C_{2n-m}^{n-m}$$
(A_i^j позначає кількість розміщень з i елементів по j, C_i^j – відповідну кількість сполучень.)

м. Вінниця
2 листопада 2017 року